Skupovi i operacije sa skupovima

U teoriji verovatnoće, događaji su skupovi. Iz tog razloga se će često biti korišćene neke poznate osobine operacija sa skupovima.

Neka je X univerzalni skup. Za skup A kažemo da je **podskup** skupa X, u oznaci $A \subseteq X$, ako važi $x \in A \Rightarrow x \in X$. Neka su A, B i C podskupovi skupa X. Skupovne operacije su definisane sa:

unija skupova A **i** B je $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,

presek skupova A **i** B je $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,

razlika skupova A **i** B je $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,

komplement skupa A je $\overline{A} = \{x : x \in X \wedge x \notin A\} = X \setminus A$,

Dekartov proizvod skupova A **i** B je $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Neke od osobina skupovnih operacija su:

- $\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{\emptyset} = X, \quad \emptyset \cup A = A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad X \cap A = A, \quad X \cup A = X,$
- $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

---

[1] *Za* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ *i* $C = \{3, 4, 5, 6\}$ *napisati elemente skupova* $A \cap C$, $A \cup B$ *i* $B \setminus C$.

Rešenje: $A \cap C = \{3, 4\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, \quad B \setminus C = \{2, 8\}.$

---

[2] *Za* $A = \{a, b, 1\}$, $B = \{b, 1, c\}$ *i* $C = \{a, 1\}$ *napisati elemente skupova* $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, $A \times C$ *i* $(A \cup B) \cap C$.

Rešenje: $A \cup B = \{a, b, 1, c\}, \quad B \cap C = \{1\}, \quad A \setminus B = \{a\}, \quad B \setminus A = \{c\},$
$A \cap B = \{b, 1\}, \quad A \times C = \{(a, a), (a, 1), (b, a), (b, 1), (1, a), (1, 1)\},$
$(A \cup B) \cap C = \{a, b, 1, c\} \cap \{a, 1\} = \{a, 1\}.$

---

[3] *Za date podskupove*

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ *je deljivo sa* 3 *i* $x < 10\}$ *i*

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 12$ *i* x *je prost broj*$\} \cup \{1\}$

univerzalnog skupa $\mathbb{N}$ *napisati elemente skupova* $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$, B^2, $\overline{(A \cup B)} \cap C$ *i* $(A \setminus C) \cup B$.

Rešenje: Dakle, za skupove $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 9\}$ i $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ je

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}, \quad B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11\}, \quad A \cap B = \{3, 6\},$
$A \cap \overline{B} = A \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, \ldots\} = \{1, 2, 4, 5\}, \quad A \cap B \cap C = \{3, 6\} \cap C = \{3\},$
$A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}, \ B \setminus A = \{9\}, \ \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\}, B\},$
$B^2 = B \times B = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (9, 3), (9, 6), (9, 9)\},$
$\overline{(A \cup B)} \cap C = \{7, 8, 10, 11, 12, \ldots\} \cap C = \{7, 11\},$
$(A \setminus C) \cup B = \{4, 6\} \cup B = \{3, 4, 6, 9\}.$

---

[4] *Grafički ispitati koje su od sledećih jednakosti tačne:*

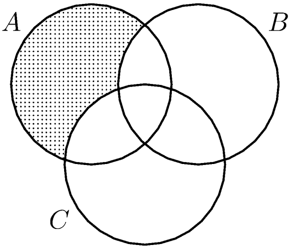
(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ (b) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ (d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ (f) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$

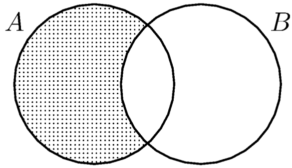
Rešenje:

(a)



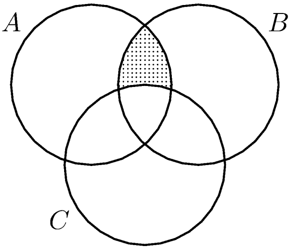
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

(b)



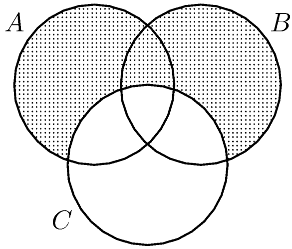
$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

(c)



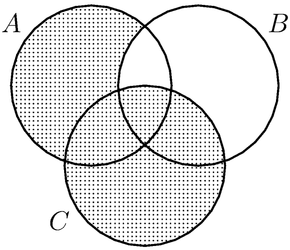
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(d)

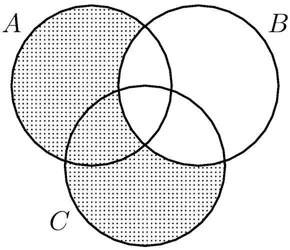


$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e)

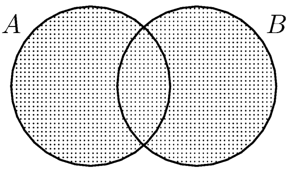


$\neq$



$(A \setminus B) \cup C$ $(A \cup C) \setminus B$

(f)



$\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$

Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego **da se koncentrišu na** njihova **rješenje** (kao i da **postavljaju pitanja** kako u vezi postavke zadataka tako i za rješenja). Često samim pisanjem postavke zadatka dovodi do zamora i gubitka koncentracije studenta. Neki zadaci sa papira će namjerno biti ostavljeni studentima za vježbu – pripremiti jednu oblast iz Matematike za ispit nije moguće ako samostalno ne uradite određen broj primjera. **Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi** iz predmeta „Inžinjerska matematika III", koju možete skinuti sa stranice *http://ff.unze.ba/nabokov/*. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Jedna od poznatih latinskih izreka je: **Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.**

Kombinatorika

Permutacije bez ponavljanja $P^n = n!$

1. Napisati sve trocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2 i 3 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.
2. Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G, I i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 4 slova.

Permutacije sa ponavljanjem $\overline{P}^n_{k_1,k_2,\dots,k_s} = \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_s!}$

3. Napisati sve četverocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, i 3 gdje se samo cifra 1 u napisanom broju može pojaviti najviše dva puta.
4. Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G i R tako da se samo slovo G ne smije pojaviti dva puta, dok se slova E i R moraju pojaviti tačno dva puta. Sve napisane riječi trebaju biti dužine 5 slova.

Kombinacije bez ponavljanja $C^n_k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

5. U kutiji se nalazi pet loptica različitih boja: crvena, bijela, plava, zelena i žuta loptica. Ako nasumice izvlačimo loptice, obrazložiti na koliko načina možemo izvući tri različite loptice.
6. Asocijaciju studenata Politehničkog fakulteta čini 7 studenata. Na koliko se različitih načina može formirati sastanak od po 5 članova kolektiva.
7. Od 10 studenata druge godine (6 muškaraca i 4 žene) 4 studenta mogu dobiti stipendiju. Na koliko načina možemo formirati grupu koja će dobiti stipendiju, ako nema nikakvih ograničenja.

Kombinacije sa ponavljanja $\overline{C}^n_k = \dbinom{n+k-1}{k}$

8. U kutiji se nalaze četiri loptice, koje trebamo obojiti u neku od vije date boje: crvenu i zelenu. Na koliko načina možemo obojiti ove četiri loptice, u zavisnosti samo od broja loptica koje su obojene u različite boje.

9. U autobusu su četiri putnika. Autobus stane na 3 različite stanice. Na koliko načina ljudi mogu izaći na ove 3 stanice, u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?

Varijacije bez ponavljanja $V_k^n = \binom{n}{k} \cdot k!$

10. Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3, 4 i 5 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.
11. Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla i značenja, koje se mogu formirati od slova E, K, C i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 3 slova.

Varijacije sa ponavljanja $\overline{V_k^n} = n^k$

12. Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3 i 4.

13. Date su cifre 3, 4, 5, 6 i 8. Koliko se neparnih trocifrenih brojeva može načiniti od tih cifara?

Razni zadaci za vježbu iz kombinatorike (rješenja pogledati u svesci)

14. Na stolu se nalazi n kuglica od kojih su dvije obilježene.
    (a) Na koliko se načina mogu poredati te kuglice tako da obilježene kuglice A i B budu jedna do druge?
    (b) Na koliko se načina mogu one poredati da A i B ne budu jedna pored druge?

15. Koja je po redu permutacija $\mathrm{STUDENT}$ u leksikografskom (abecednom) poretku načinjena od elemenata $\{\mathrm{D,\ E,\ N,\ S,\ T,\ T,\ U}\}$?

16. Na koliko se načina može rasporediti n bijelih i n crnih kuglica numerisanih brojevima $1, 2, ..., n$, ali tako da dvije kuglice iste boje ne budu jedna pored druge?

17. Jedan rukovodilac ima 7 direktno potčinjenih radnika. Koliko on može formirati različitih sastanaka
    (a) od po 5 članova kolektiva;
    (b) i po broju i po sastavu prisutnih?

18. U lotu od 50 šina nalazi se 40 dobrih i 10 loših.
    (a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šina?
    (b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šina od kojih su 2 loše?

19. Pravougaonik je ispresijecan pravama paralelnim njegovim stranicama. Ako je broj pravih paralelnih jednoj njegovoj stranici m, a paralelnih drugoj stranici n, naći broj tako nastalih pravougaonika. (Na kraju rješenje primijeniti za specijalni slučaj kada je $\mathrm{m} = 3$ i $\mathrm{n} = 4$).

20. Sprovedena je anketa. Anketirana su 2 muškarca i 2 žene. U prostoriji je bilo 36 ljudi i to 19 muškaraca i 17 žena. Na koliko različitih načina su anketari mogli odabrati 4 anketirane osobe?

21. Koliko ima različitih voznih karata za putovanje jednom željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica?

22. Koliko ima stanica na željezničkoj pruzi, ako za razna putovanja tom prugom postoji 702 različite vozne karte?

23. Koliko se različitih petocifrenih brojeva može načiniti od cifara 0, 1, 2, 3, 4 i 5, ako:
    (a) petocifreni brojevi nisu oni koji počinju sa 0;
    (b) petocifreni brojevi počinju sa 20.

Kombinatorika

- **Binomni koeficijent**: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $(0! = 1)$

- **Pravilo proizvoda**: ako skup A_1 ima n_1 elemenata, skup A_2 ima n_2 elemenata, $\ldots$, skup A_k ima n_k elemenata, i ako se bira po jedan element iz svakog od skupova A_i pri čemu su svi posmatrani elementi različiti, ovakvih izbora ima $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

- **Permutacije**:

  - **Permutacije bez ponavljanja**: svi elementi skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se raspoređuju u uređenu n-torku; broj ovakvih rasporeda je $\mathrm{P_n} = n!$.
  - **Permutacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ se bira n_1 puta element a_1, n_2 puta element a_2, $\ldots$, n_k puta element a_k, i izabrani elementi se svrstavaju u uređenu n-torku onim redom kojim su birani; ovakvih izbora ima $\mathrm{P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$, gde je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

- **Varijacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se $k \leq n$ puta bira neki element tako da svi izabrani elementi budu različiti (prethodno izabrani elementi se ne biraju ponovo), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku ; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\mathrm{V^n_k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$.

- **Varijacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se k puta bira neki element tako da se svaki put element bira iz celog skupa A (prethodno izabrani elementi se mogu ponovo izabrati), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku ; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\overline{\mathrm{V}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} = n^k$.

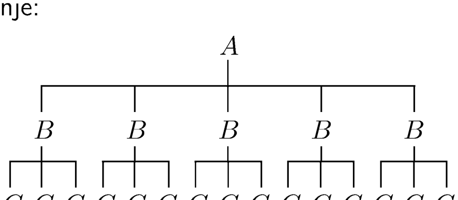
- **Kombinacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup od $k \leq n$ elemenata; ovakvih podskupova ima $\mathrm{C^n_k} = \binom{n}{k}$.

- **Kombinacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup u kome se elementi mogu ponavljati, ali tako da ukupno elemenata sa ponavljanjima bude k; ovakvih izbora ima $\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} = \binom{n+k-1}{k}$.

---

[5] *Od mesta A do mesta B vodi 5 puteva, a od mesta B do mesta C vode 3 puta. Koliko puteva vodi od mesta A do mesta C preko mesta B?*

Rešenje:



Broj puteva je $5 \cdot 3 = 15$
(vidi pravilo proizvoda, strana 3)

Kombinatorika

Permutacije bez ponavljanja

Neka je dat skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Bilo koji raspored elemenata ovog skupa, u kome se jedan element javlja samo jednom, nazivamo permutacija bez ponavljanja. Broj permutacija bez ponavljanja skupa od n elemenata obilježavamo sa P^n i računamo po formuli:

$$P^n = n!$$

(#) Napisati sve trocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2 i 3 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.

Rj.

123
132
213
231
312
321

$$P^3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

(#) Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G, I i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 4 slova.

Rj.

EGIR	GIRE	IEGR	RIGE
EGRI	GIER	IERG	RIEG
ERGI	GEIR	IGRE	REGI
ERIG	GERI	IGER	REIG
EIGR	GRIE	IREG	RGIE
EIRG	GREI	IRGE	RGEI

$$P^4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 12 = 24$$

Permutacije sa ponavljanjem

Neka je dat skup A od n elemenata među kojima ima k_1 jednakih jedne vrste, k_2 jednakih druge vrste, ..., k_s jednakih s-te vrste, pri čemu je $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$.

Tj.

$$A=\{\underbrace{a_1,a_1,\ldots,a_1}_{k_1 \text{ puta}},\underbrace{a_2,a_2,\ldots,a_2}_{k_2 \text{ puta}},\ldots,\underbrace{a_s,a_s,\ldots,a_s}_{k_s \text{ puta}}\}$$

Elemenata u skupu A ima n.

Bilo koji raspored koji se sastoji od svih ovih elemenata naziva se permutacija sa ponavljanjem, obilježava se sa $\overline{P}^{\,n}_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ i broj ovih permutacija sa ponavljanjem se računa po formuli

$$\overline{P}^{\,n}_{k_1,k_2,\ldots,k_s}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_s!}$$

\# Napisati sve četverocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2 i 3 gdje se samo cifra 1 u napisanom broju može ponoviti najviše dva puta.

Rj.

1132	3121	2113
1123	3112	2131
1213	3211	2311
1231		
1312		
1321		

$$\overline{P}^{\,4}_{2,1,1}=\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2}=12$$

#

Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G i R tako da se samo slovo G ne smije pojaviti dva puta, dok se slova E i R moraju pojaviti tačno dva puta. Sve napisane riječi trebaju biti dužine 5 slova.

Rj.

EEGRR	RRGEE	GEERR
EERGR	RREGE	GERER
EERRG	RREEG	GERRE
ERGRE	REGRE	GREER
ERGER	REGER	GRERE
ERRGE	RERGE	GRREE
ERREG	REREG	
EREGR	REEGR	
ERERG	REERG	
EGERR	RGREE	
EGRER	RGERE	
EGRRE	RGEER	

$$\overline{P}^{5}_{2,1,2} = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}^{1}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}\cdot \cancel{2}_{1}} = 30$$

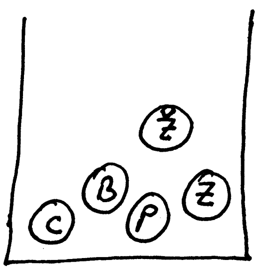
Kombinacije bez ponavljanja

Neka je dat skup od n elemenata. Svaki podskup od r elemenata ovoga skupa, gdje je $r<n$, naziva se kombinacija bez ponavljanja r-te klase od n elemenata. Broj kombinacija bez ponavljanja r-te klase od n elemenata označavamo sa C_r^n i računamo po formuli

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

\# U kutiji se nalazi pet loptica različitih boja: crvena, bijela, plava, zelena i žuta loptica. Ako nasumice izvlačimo loptice, obrazložiti na koliko načina možemo izvući tri različite loptice.

Rj.



Ako je bar jedna izvučena loptica crvene boje tada imamo sljedeće kombinacije

CBP
CBŽ
CBZ
CPŽ
CPZ
CZŽ

Ostale kombinacije su

BPZ BZŽ
BPŽ PŽZ

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 10$$

\# Asocijaciju studenata Politehničkog fakulteta čini 7 studenata. Na koliko se različitih načina može formirati sastanak od po 5 članova kolektiva

Rj. Kako redoslijed nije bitan

$$C_5^7 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$$

\# Od 10 studenata druge godine (6 muškaraca i 4 žene) 4 studenta mogu dobiti stipendiju. Na koliko načina možemo formirati grupu koja će dobiti stipendiju, ako nema nikakvih ograničenja.

Rj. S obzirom da redoslijed nije bitan koristićemo kombinacije bez ponavljanja

$$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{1} \cdot 7}{1 \cdot \cancel{2}_{1} \cdot \cancel{3}_{1} \cdot \cancel{4}_{1}} = 210$$

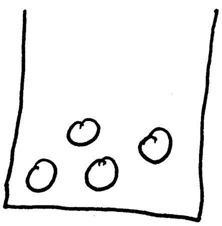
Grupu možemo formirati na 210 različitih načina.

Kombinacije sa ponavljanjem

$$\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$$

#) U kutiji se nalaze četri loptice, koje trebamo obojiti u neku od dvije date boje: crvenu i zelenu. Na koliko načina možemo obojiti ove četri loptice, u zavisnosti samo od broja loptica koje su obojene u različite boje.

Rj.

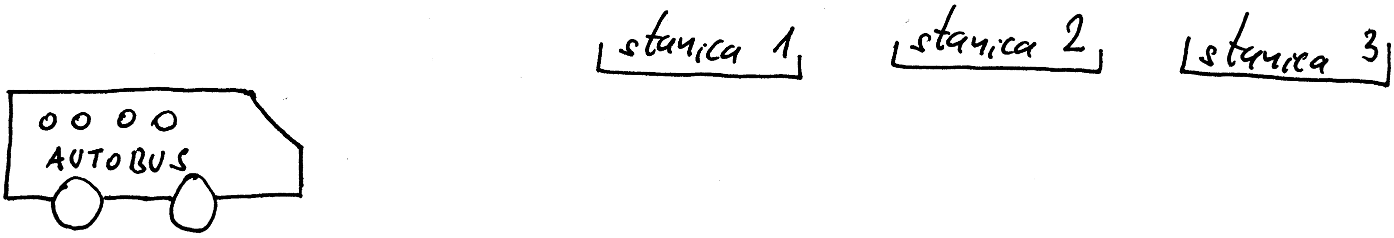


crvena	zelena	loptice
4	0	c c c c
3	1	c c c z
2	2	c c z z
1	3	c z z z
0	4	z z z z

$$\overline{C}_4^2 = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

(#) U autobusu su 4 putnika. Autobus stane na 3 stanice. Na koliko načina ljudi mogu izaći na ove 3 stanice, u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?

Rj.



stanica 1	stanica 2	stanica 3	putnici
4	0	0	1 1 1 1
3	1	0	1 1 1 2
3	0	1	1 1 1 3
2	2	0	1 1 2 2
2	1	1	1 1 2 3
2	0	2	1 1 3 3
1	3	0	1 2 2 2
1	2	1	1 2 2 3
1	1	2	1 2 3 3
1	0	3	1 3 3 3
0	4	0	2 2 2 2
0	3	1	2 2 2 3
0	2	2	2 2 3 3
0	1	3	2 3 3 3
0	0	4	3 3 3 3

$$\overline{C}_4^{3} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

Varijacije bez ponavljanja

Ako se u svakoj kombinaciji bez ponavljanja elemenata, elementi međusobno permutuju, dobiju se varijacije bez ponavljanja. Broj varijacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase označavamo sa V_k^n i računamo po formuli

$$V_k^n = \binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

(#) Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3, 4 i 5 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.

Rj.

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

$$V_2^5 = \binom{5}{2} \cdot 2! = 5 \cdot 4 = 20$$

(#) Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla i značenja, koje se mogu formirati od slova E, K, C i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 3 slova.

Rj.

EKC	KEC	CEK	REK
EKR	KER	CER	REC
ECK	KCE	CKR	RKE
EKC	KCR	CKE	RKC
ERK	KRC	CRE	RCE
ERC	KRE	CRK	RCK

$$V_3^4 = \binom{4}{3} \cdot 3! = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 24$$

Varijacije sa ponavljanjem

Ako se varijacije elemenata mogu i ponavljati onda se dobiju varijacije sa ponavljanjem. Broj varijacija sa ponavljanjem od n elemenata k-te klase označavamo sa $\overline{V}_k^n$ i računamo po formuli

$$\overline{V}_k^n = n^k$$

\# Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3 i 4.

Rj.

11	21	31	41
12	22	32	42
13	23	33	43
14	24	34	44

$$\overline{V}_2^4 = 4^2 = 16$$

(#) Date su cifre 3, 4, 5, 6 i 8. Koliko se neparnih trocifrenih brojeva može načiniti od tih cifara?

Rj.:

Kako se traži neparan trocifren broj, cifra jedinice može biti samo 3 ili 5.

$\square\square 3$

$\square\square 5$

ove dvojke predstavljaju cifre stotica i desetica

Cifre desetica i stotica mogu biti bilo koja od datih cifri, pa je broj mogućih dvojki $\square\square$ jednak

$$\overline{V}_2^5 = 5^2 = 25$$

Kada se ovim dvojkama doda cifra jedinice, koja može biti 3 ili 5 dobićemo neparne trocifrene brojeve kojih ima ukupno

$$2 \cdot \overline{V}_2^5 = 2 \cdot 25 = 50$$

Moguće je formirati 50 različitih neparnih trocifrenih brojeva od datih cifara.

Sljedećih 12 zadataka koji slijede (zadaci [10]-[21]) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

[10] *Na koliko različitih načina se može izabrati* 8 *karata iz špila od* 52 *karte tako da među izabranim kartama bude*

(a) *tačno* 2 *sedmice i* 3 *keca,*

(b) *tačno* 2 *sedmice i bar* 3 *keca?*

Rešenje: Označimo sa s_i broj načina izbora i sedmica, sa k_j broj načina izbora j kečeva, a sa o_k broj načina izbora k karata među kojima nema ni sedmica ni kečeva (takvih karata u špilu ima $52-4-4=44$). Analogno postupku iz zadatka [9], koristeći pravilo proizvoda izračunavamo

(a) $s_2k_3o_3 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_3^{44} = 317856.$

(b) $s_2k_3o_3 + s_2k_4o_2 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_3^{44} + \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_4^4 \cdot \mathrm{C}_2^{44} = 317856 + 5676 = 323532.$

---

[11] *Hor se sastoji od* 10 *članova. Na koliko načina se može birati po* 6 *članova za nastup, za svaki od* 3 *dana turneje hora, ali tako da*

(a) *sastavi za nastup različitih dana mogu biti isti,*

(b) *sastavi za nastup različitih dana ne mogu biti isti?*

Rešenje:

(a) Svakog dana se bira podskup od 6 članova iz skupa od 10 članova hora (kombinacije bez ponavljanja od 10 elemenata klase 6). Dakle, primenom pravila proizvoda dobijamo da je broj izbora $\mathrm{C}_6^{10} \cdot \mathrm{C}_6^{10} \cdot \mathrm{C}_6^{10} = 210^3 = 9261000.$

(b) Prvog dana se, naravno, sastav može birati na $\mathrm{C}_6^{10} = 210$ načina, drugog dana je broj izbora za jedan manji, a trećeg dana je broj izbora još za jedan manji. Sledi da primenom pravila proizvoda dobijamo za ukupan broj načina biranja $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9129120.$

---

[12] *Betoven je napisao ukupno* 9 *simfonija, Mocart* 27 *koncerata za klavir, a Šubertovih gudačkih kvarteta ima* 15.

(a) *Radio stanica u večernjoj muzičkoj emisiji svakog dana pušta po jednu Betovenovu simfoniju i jedan Mocartov klavirski koncert. Koliko najviše dana zaredom stanica može da pravi različite emisije (emisije koje se razlikuju u bar jednoj od dve kompozicije koje emituje, pri čemu ne smatramo različitim emisije u kojima su iste kompozicije emitovane obrnutim redosledom)?*

(b) *Ako urednik pomenute emisije svake večeri pušta prvo jednu Betovenovu simfoniju, zatim jedan Mocartov klavirski koncert, i na kraju jedan Šubertov gudački kvartet, koliko dugo urednik može na ovaj način da pravi emisije?*

Rešenje:

(a) Koristeći pravilo proizvoda dobijamo da je broj različitih emisija (broj mogućih izbora) $9 \cdot 27 = 243.$

(b) Na isti način kao pod (a) se dobija da je broj mogućih načina izbora emisija $9 \cdot 27 \cdot 15 = 3645$, što je $(3645 = 9 \cdot 365 + 360)$ približno 10 godina.

---

[13] *Napisati sve dvocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara* $1, 2, 3, 4$ *tako da se u jednom broju*

(a) *ne mogu nalaziti iste cifre,*

(b) *mogu nalaziti iste cifre.*

Rešenje:

(a) Ovakvih brojeva ima $\mathrm{V}_2^4 = 12$, i to su brojevi 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

(b) Ovakvih brojeva ima $\overline{\mathrm{V}}_2^4 = 16$, i to su brojevi 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

---

[14] *Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu napisati od cifara* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *takvih da se u jednom broju*

(a) *ne mogu nalaziti iste cifre,*

(b) *mogu nalaziti iste cifre?*

Rešenje:

(a) $\mathrm{V}_4^8 = 1680$.

(b) $\overline{\mathrm{V}}_4^8 = 4096$.

---

[15] *Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima su sve cifre različite?*

Rešenje: Prvu cifru a biramo iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$, dakle postoji 9 mogućih izbora. Nakon što smo izbrali prvu cifru, ostale cifre biramo tako što od elemenata skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a\}$ (ima ih 9) sastavljamo uređenu 4-orku kod koje su sve komponente različite. Broj ovakvih izbora je (varijacije bez ponavljanja) $\mathrm{V}_4^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Primenom pravila proizvoda dobijamo da brojeva opisanog tipa ima $9 \cdot 3024 = 27216$.

Drugi način: Prva cifra broja ne može biti nula, te ćemo traženi broj dobiti kao $a - b$ gde je a ukupan broj nizova od 5 različitih cifara (gde i prva cifra može biti 0), a b je broj nizova od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0. Nizove od 5 različitih cifara pravimo tako što iz skupa od 10 cifara 5 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $a = \mathrm{V}_5^{10} = 30240$ načina. Nizove od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0 pravimo tako što iz skupa od 9 cifara (cifra 0 je „potrošena”) 4 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $b = \mathrm{V}_4^9 = 3024$ načina. Prema tome, petocifrenih brojeva opisanog tipa ima $30240 - 3024 = 27216$.

---

[16] *Na šahovskom turniru učestvuje 12 šahista. Ako svaki šahista treba da odigra po jednu partiju sa svim ostalim šahistima, koliko će ukupno partija biti odigrano na turniru?*

Rešenje: Biće odigrano onoliko partija koliko ima parova šahista, tj. koliko ima dvočlanih podskupova skupa od 12 šahista, a taj broj je $\mathrm{C}_2^{12} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$.

---

[17] *Do vrha planine vodi 5 puteva. Na koliko načina planinar može da se popne i spusti sa vrha ako*

(a) *može da se spušta istim putem kojim se popeo,*

(b) *ne može da se spušta istim putem kojim se popeo?*

Rešenje: U oba slučaja se put za penjanje bira na 5 načina, a put za spuštanje se u prvom slučaju bira na 5, a u drugom na 4 načina, tako da rešenje glasi

(a) $\overline{\mathrm{V}}_2^5 = 5\cdot 5 = 25$,

(b) $\mathrm{V}_2^5 = 5\cdot 4 = 20$.

---

[18] *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* $1,1,1,2,2,2$*?*

Rešenje: Od zadanih cifara šestocifreni broj pravimo tako što cifre raspoređujemo u niz (bitan je redosled i koristimo sve cifre), ali među ciframa ima i jednakih, što znači da se radi o permutacijama sa ponavljanjem, te odgovor glasi $\mathrm{P}_{3,3}^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

---

[19] *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* $1,2,2,3,3,3$*?*

Rešenje: Na isti način kao u zadatku [18] dobijamo rešenje $\mathrm{P}_{1,2,3}^6 = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$.

---

[20] *Iz grupe od 10 muškaraca i 8 žena treba odabrati 6 osoba među kojima najmanje 3 treba da budu žene. Na koliko načina se može izvršiti ovakav izbor?*

Rešenje: Neka je $\check{z}_i$, $i\in\{3,4,5,6\}$ broj načina na koji se mogu odabrati i žena i $6-i$ muškaraca (ukupno 6 osoba). Traženi broj načina izbora je $\check{z}_3+\check{z}_4+\check{z}_5+\check{z}_6$. Kada pri izboru 6 osoba biramo i žena i $6-i$ muškaraca, tada iz skupa od 10 muškaraca biramo na $\mathrm{C}_{6-\mathrm{i}}^{10}$ načina podskup od $6-i$ elemenata, i iz skupa od 8 žena biramo na $\mathrm{C}_{\mathrm{i}}^{8}$ načina podskup od i elemenata, te na osnovu pravila proizvoda dobijamo da je $\check{z}_i = \mathrm{C}_{6-\mathrm{i}}^{10}\cdot\mathrm{C}_{\mathrm{i}}^{8} = \binom{10}{6-i}\cdot\binom{8}{i}$. Prema tome,

$$\check{z}_3 = \binom{10}{3}\cdot\binom{8}{3} = 120\cdot 56 = 6720,\qquad \check{z}_4 = \binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4} = 45\cdot 70 = 3150,$$

$$\check{z}_5 = \binom{10}{1}\cdot\binom{8}{5} = 10\cdot 56 = 560,\qquad \check{z}_6 = \binom{10}{0}\cdot\binom{8}{6} = 1\cdot 28 = 28,$$

te rešenje zadatka glasi $6720+3150+560+28 = 10458$.

---

[21] *Koliko se reči (računajući i besmislene) može napisati koristeći slova a, b, c, d, e tako da se svako slovo u reči javlja najviše jednom i tako da reč*

(a) *obavezno sadrži slovo a,*

(b) *počinje slovom a?*

Rešenje: Neka je k_i broj reči dužine i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Broj reči koje se mogu napisati u skladu sa zadatim uslovima je $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$.

(a) Očigledno je $k_1 = 1$, a reč dužine i, $i \in \{2,3,4,5\}$ pravimo tako što osim slova a odaberemo još $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$, a zatim ova slova ređamo u niz. Izbor $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$ se može uraditi na $\mathrm{C}^4_{\mathrm{i}-1}$ načina, a izabrana slova i slovo a se zatim mogu poređati u niz na $\mathrm{P_i}$ načina (na primer, pri pisanju reči od 3 slova pored slova a možemo izabrati još parove slova $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$ i $\{d,e\}$, pa ako smo odabrali npr. slova $\{b,d\}$, tada možemo napisati reči *abd*, *adb*, *bad*, *bda*, *dab* i *dba*); prema tome, koristeći pravilo proizvoda, za $i \in \{2,3,4,5\}$ dobijamo $k_i = \mathrm{C}^4_{\mathrm{i}-1} \cdot \mathrm{P_i}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{C}^4_1 \cdot \mathrm{P}_2 = \tfrac{4!}{1!3!} \cdot 2! = 8, \qquad k_3 = \mathrm{C}^4_2 \cdot \mathrm{P}_3 = \tfrac{4!}{2!2!} \cdot 3! = 36,$$
$$k_4 = \mathrm{C}^4_3 \cdot \mathrm{P}_4 = \tfrac{4!}{3!1!} \cdot 4! = 96, \qquad k_5 = \mathrm{C}^4_4 \cdot \mathrm{P}_5 = \tfrac{4!}{4!0!} \cdot 5! = 120.$$

Dakle, može se napisati $1 + 8 + 36 + 96 + 120 = 161$ reč.

(b) <u>Prvi način</u>: analogno kao pod (a), osim što nakon izbora slova od tih slova ne pravimo proizvoljan niz, već slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a ostala raspoređujemo u niz na proizvoljan način, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = \mathrm{C}^4_{\mathrm{i}-1} \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{i}-1}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{C}^4_1 \cdot \mathrm{P}_1 = \tfrac{4!}{1!3!} \cdot 1! = 4, \qquad k_3 = \mathrm{C}^4_2 \cdot \mathrm{P}_2 = \tfrac{4!}{2!2!} \cdot 2! = 12,$$
$$k_4 = \mathrm{C}^4_3 \cdot \mathrm{P}_3 = \tfrac{4!}{3!1!} \cdot 3! = 24, \qquad k_5 = \mathrm{C}^4_4 \cdot \mathrm{P}_4 = \tfrac{4!}{4!0!} \cdot 4! = 24.$$

Dakle, može se napisati $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$ reči.

<u>Drugi način</u>: pri pravljenju reči od i slova, slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a zatim pravimo niz od $i-1$ slova od elemenata skupa $\{b,c,d,e\}$, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = \mathrm{V}^4_{\mathrm{i}-1}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{V}^4_1 = 4, \qquad k_3 = \mathrm{V}^4_2 = 4 \cdot 3 = 12,$$
$$k_4 = \mathrm{V}^4_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \qquad k_5 = \mathrm{V}^4_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Dakle, može se napisati $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$ reči.

\# Na stolu se nalazi n kuglica od kojih su dvije obilježene A i B.

1° Na koliko se načina mogu poredati te kuglice tako da obilježene kuglice A i B budu jedna do druge ?

2° Na koliko se načina mogu one poredati da A i B ne budu jedna pored druge ?

RJEŠENJE:

Razlikovaćemo dva slučaja: kuglice su različite i kuglice su jednake među sobom, izuzev označenih kuglica A i B.

a) Pretpostavimo da su kuglice različite među sobom.

1° Ako su kuglice A i B jedna pored druge, možemo ih vezati i posmatrati kao jedan element, pa zajedno sa preostalih $n-2$ kuglica čine niz od $n-1$ različitih elemenata. Njihov razmještaj možemo povezati sa permutacijama bez ponavljanja čiji je ukupan broj jednak:

$$n_1 = P^{n-1} = (n-1)!.$$

Ako su A i B jedna pored druge, onda su i B i A jedna pored druge, pa je ukupan broj različitih razmještaja tih n kuglica tako da su obilježene kuglice jedna pored druge jednak:

$$2 \cdot n_1 = 2 \cdot (n-1)!.$$

2° Ako kuglice A i B nisu jedna pored druge, onda ćemo od ukupnog broja razmještaja svih n različitih kuglica, što predstavlja broj permutacija od n elemenata bez ponavljanja, oduzeti broj permutacija kad su one jedna pored druge, pa je:

$$n_2 = n! - 2 \cdot n_1 = n! - 2 \cdot (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-2).$$

b) Pretpostavimo da su neoznačene kuglice jednake među sobom.

1° Svaki razmještaj ovih n kuglica predstavlja permutaciju sa ponavljanjem. Ako su A i B jedna pored druge, onda je ukupan broj različitih razmještaja jednak:

$$n_3 = 2 \cdot \overline{P}_{n-2}^{\,n-1} = 2 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 2 \cdot (n-1).$$

2° Ako A i B nisu jedna pored druge, onda je broj različitih razmještaja jednak:

$$n_4 = \overline{P}_{n-2}^{\,n} - n_3 = \frac{n!}{(n-2)!} - 2 \cdot (n-1) = n \cdot (n-1) - 2 \cdot (n-1) = (n-1) \cdot (n-2).$$

Desetak zadataka koji slijede su posuđeni iz knjige:
"Vjerovatnoća i matematička statistika", Tomka Subašić, Zenica, 2007

\# Koja je po redu permutacija STUDENT u leksikografskom (abecednom) poretku načinjena od elemenata {D, E, N, S, T, T, U}?

RJEŠENJE:

Označimo sa $p_n = STUDENT$ n – tu permutaciju elemenata {D, E, N, S, T, T, U}. Treba odrediti n. Tada je prva permutacija $p_1 = DENSTTU$.

Da bi slovo S došlo na prvu poziciju, treba da zamijeni mjesta sa tri slova koja su ispred njega u prvoj permutaciji. Pri tome ostalih 6 slova, od kojih su dva ista, mogu se permutovati, pa je ukupan broj razmještaja da se dobije permutacija $p_{n_1} = S(DENTTU)$ jednak:

$$n_1 = 3 \cdot \overline{P}_2^{\,6} + 1 = 3 \cdot \frac{6!}{2!} + 1 = 1081.$$

Da bi slovo T došlo na drugu poziciju, treba da zamijeni mjesta sa tri slova koja su ispred njega u 1081. permutaciji. Pri tome ostalih 5 slova mogu se permutovati, pa je ukupan broj razmještaja da se dobije permutacija $p_{n_2} = ST(DENTU)$ jednak:

$$n_2 = 3 \cdot P^5 + 1081 = 3 \cdot 5! + 1081 = 360 + 1081 = 1441.$$

Da bi slovo U došlo na treću poziciju, treba da zamijeni mjesta sa 4 slova koja su ispred njega u prethodnoj permutaciji i da se pri tome ostala 4 slova mogu permutovati. Ukupan broj razmještaja da se dobije permutacija $p_{n_3} = STU(DENT)$ je:

$$n_3 = 4 \cdot P^4 + n_2 = 4 \cdot 4! + 1441 = 96 + 1441 = 1537.$$

Slovo D u prethodnoj permutaciji se nalazi na 4. poziciji kao i u datoj riječi, pa ne mijenja mjesta sa slovima ispred njega, a preostala 3 slova se permutuju, pa je $p_{n_4} = STUD(ENT)$:

$$n_4 = 0 \cdot 3! + \mathrm{n}_3 = 1537.$$

Isto tako i slova E, a zatim i N i T ne mijenjaju mjesta sa slovima ispred njih. pa je:

$$p_{n_5} = STUDE(NT) \Rightarrow n_5 = 0 \cdot 2! + n_4 = 1537.$$

$$p_{n_6} = STUDEN(T) \Rightarrow n_6 = 0 \cdot 1! + n_5 = 1537.$$

$$p_n = STUDENT \Rightarrow n = 0 \cdot 0! + n_6 = 1537.$$

Permutacija p_n je tražena riječ i ona je 1537. permutacija po redu, tj.

$$p_{1537} = STUDENT.$$

#Na koliko se načina može rasporediti n bijelih i n crnih kuglica numerisanih brojevima $1, 2, ..., n$, ali tako da dvije kuglice iste boje ne budu jedna pored druge ?

RJEŠENJE:

Obzirom na to da su kuglice numerisane, smatraćemo da su različite među sobom.Broj razmještaja n bijelih kuglica jednak je broju permutacija od n elemenata bez ponavljanja tj. $n!$. Isto tako se n crnih kuglica može poredati na $n!$ načina. Ako svaki razmještaj bijelih kuglica kombinujemo sa svakim razmještajem crnih kuglica tako da crne kuglice umetnemo između bijelih, dobićemo razmještaje u kojima neće biti dvije kuglice iste boje jedna do druge i koji će biti različiti među sobom. Takvih razmještaja biće:

$$m_1 = (n!)\cdot(n!) = (n!)^2 .$$

Kako razmještaj možemo početi sa bijelom a završiti sa crnom kuglicom i obrnuto, početi sa crnom a završiti sa bijelom kuglicom, ukupno će biti različitih razmještaja:

$$2\cdot m_1 = 2\cdot(n!)^2 .$$

#Jedan rukovodilac ima 7 direktno potčinjenih radnika. Koliko on može formirati različitih sastanaka

a) od po 5 članova kolektiva;

b) i po broju i po sastavu prisutnih ?

RJEŠENJE:

a) Kako redosljed nije bitan, broj različitih sastanaka od po 5 članova kolektiva je:

$$n = C_5^7 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21 .$$

b) Rukovodilac može održati sastanak sa po 1 članom, sa po 2 člana, sa po 3 člana,..., sa svim članovima kolektiva, pa je broj različitih sastanaka i po broju i po sastavu prisutnih jednak:

$$n = C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7 = \sum_{k=1}^{7}\binom{7}{k} = 2^7 - \binom{7}{0} = 127 .$$

U lotu od 50 šina nalazi se 40 dobrih i 10 loših.

a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šina?

b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šina od kojih su 2 loše?

RJEŠENJE:

Kad se uzima uzorak redoslјed nije bitan, pa ćemo koristiti kombinacije bez ponavljanja za određivanje broja mogućih uzoraka.

a) Kako je broj šina $n = 50$, a broj šina u uzorku $r = 5$, broj različitih mogućih uzoraka računamo pomoću broja kombinacija pedesetog reda, pete klase, bez ponavljanja, tj.

$$n_1 = C_5^{50} = \binom{50}{5} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5!} = 2\,118\,760 \;.$$

b) Ako iz skupa od 40 dobrih šina formiramo uzorke od po 3 šine, a iz skupa od 10 loših šina, formiramo uzorke sa po 2 šine, pa svaki uzorak iz prvog skupa udružimo sa svakim uzorkom iz drugog skupa, dobićemo uzorke sa 5 šina, od kojih su 2 šine loše. Broj takvih uzoraka je:

$$n_2 = C_3^{40} \times C_2^{10} = \binom{40}{3} \times \binom{10}{2} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3!} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2!} = 444\,600 \;.$$

Pravougaonik je ispresijecan pravama paralelnim njegovim stranicama. Ako je broj pravih paralelnih jednoj njegovoj stranici m, a paralelnih drugoj stranici n, naći broj tako nastalih pravougaonika. (Primijeniti za specijalni slučaj $m = 3$ i $n = 4$).

RJEŠENJE:

Ako je broj pravih koje su paralelne jednoj stranici pravougaonika m, tada je, zajedno sa stranicama, broj pravih paralelnih međusobno $m+2$. Svake dvije od tih pravih, zajedno sa druge dvije stranice pravougaonika, obrazuju novi pravougaonik, pa se njihov broj računa pomoću kombinacija bez ponavljanja, jer redoslјed nije bitan, i on je jednak:

$$n_1 = C_2^{m+2} = \binom{m+2}{2} = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2!} = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2} \,.$$

Ako imamo n pravih paralelnih drugim dvjema stranicama i na isti način presijecamo dati pravougaonik, broj pravougaonika će biti:

$$n_2 = C_2^{n+2} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} \,.$$

Presiječemo li dati pravougaonik u isto vrijeme sa m pravih paralelnih jednoj stranici i n pravih paralelnih drugoj stranici, broj nastalih pravougaonika je:

$$n_3 = n_1 \cdot n_2 = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} \;.$$

U specijalnom slučaju je:

$$n_3 = n_1 \cdot n_2 = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 150 \,.$$

\# Sprovedena je anketa. Anketirana su 2 muškarca i 2 žene. U prostoriji je bilo 36 ljudi i to 19 muškaraca i 17 žena. Na koliko različitih načina su anketari mogli odabrati 4 anketirane osobe ?

RJEŠENJE:

Kako redosljed nije bitan, broj različitih odabira anketiranih odredićemo pomoću kombinacija bez ponavljanja. Ako se iz skupa od 19 muškaraca uzimaju na slučaj po 2, tada je broj različitih izbora jednak:

$$n_1 = C_2^{19} = \binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2!} = 171.$$

Isto tako je, ako se iz skupa od 17 žena uzima na slučaj po 2 žene, broj različitih izbora je

$$n_2 = C_2^{17} = \binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2!} = 136.$$

Ako svaki izbor iz prvog skupa udružimo sa svakim izborom iz drugog skupa dobićemo po 4 anketirana od kojih su 2 muškarca i 2 žene. Broj takvih četvorki je:

$$n = n_1 \cdot n_2 = 171 \cdot 136 = 23256.$$

Anketari su mogli odabrati na 23256 različitih načina 4 anketirana iz datog skupa ljudi.

\# Koliko ima različitih voznih karata za putovanje jednom željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica?

RJEŠENJE:

Broj različitih voznih karata ćemo odrediti pomoću varijacija bez ponavljanja, jer je redosljed bitan u izdavanju karata (od stanice A do stanice B i od stanice B do stanice A nije isto), zatim karta se izdaje između dvije različite stanice. Prema tome je:

$$n = V_2^{77} = 77 \cdot 76 = 5852 .$$

Dakle, može se izdati 5852 različite vozne karte za putovanje željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica.

\# Koliko ima različitih voznih karata za putovanje jednom željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica?

RJEŠENJE:

Broj različitih voznih karata ćemo odrediti pomoću varijacija bez ponavljanja, jer je redosljed bitan u izdavanju karata (od stanice A do stanice B i od stanice B do stanice A nije isto), zatim karta se izdaje između dvije različite stanice. Prema tome je:

$$n = V_2^{77} = 77 \cdot 76 = 5852 .$$

Dakle, može se izdati 5852 različite vozne karte za putovanje željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica.

\# Koliko ima stanica na željezničkoj pruzi, ako za razna putovanja tom prugom postoji 702 različite vozne karte?

RJEŠENJE:

Obzirom na to da se izdaju karte između dvije različite stanice, da karta od stanice A do stanice B nije ista kao karta od stanice B do stanice A, broj različitih karata ćemo računati pomoću broja varijacija bez ponavljanja n-te klase drugog reda, gdje je n broj stanica koji je nepoznat.

$$V_2^n = n \cdot (n-1) = 702 \Rightarrow n^2 - n - 702 = 0 \wedge n \in N \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 702}}{2} = \frac{1 \pm 53}{2};$$

$n_1 = 27, n_2 = -26.$ Zbog $n \in N$, slijedi da $n_2 = -26 \notin N$,

pa je broj stanica na toj pruzi $n = 27$.